

Contrôle N°1 Analyse I  
SMA-SMI

Problème 1. On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{4}{u_n})$ .

- (2) (1) a. Montrer que  $u_n^2 - 4 = \frac{(u_{n-1}^2 - 4)^2}{4u_{n-1}^2}$  pour tout  $n \geq 1$ . Montrer alors que  $u_n \geq 2$  pour tout  $n \geq 0$ .  
(2) b. Démontrer que  $u$  est décroissante.  
(2) c. Montrer que  $u$  est convergente et calculer sa limite.

Problème 2. On considère les suites  $u$  et  $v$  définies par  $u_0 = 4, v_0 = 9, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ .

- (1) a. Pour  $a > 0$  et  $b > 0$ , montrer que  $\frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ .  
(2) b. En déduire que  $v_n - u_n \geq 0$ .  
(1.5) (1.5) c. Montrer que  $v$  est décroissante et que  $u$  est croissante.  
(1) (1) d. Montrer que  $v_n - u_n \leq v_{n-1} - u_{n-1}$  et que  $v_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$ , pour tout  $n \geq 1$ .  
(1) e. En déduire que  $v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$  pour tout  $n \geq 1$ .  
(2) (2) f. Montrer que  $v_n - u_n \leq 5(\frac{1}{2})^n$  pour tout  $n \geq 0$ . En déduire que les suites  $u$  et  $v$  sont convergentes et ont la même limite.

Corrigé

Problème 1. a. On a :

$$2 \left\{ \begin{aligned} u_n^2 - 4 &= \frac{1}{4} \left( u_{n-1}^2 + 8 + \frac{16}{u_{n-1}^2} - 16 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( u_{n-1}^2 - 8 + \frac{16}{u_{n-1}^2} \right) = \frac{u_{n-1}^4 - 8u_{n-1}^2 + 16}{4u_{n-1}^2} \\ &= \frac{(u_{n-1}^2 - 4)^2}{4u_{n-1}^2} \end{aligned} \right.$$

1 { Donc,  $u_n^2 - 4 \geq 0$  pour  $n \geq 1$ . Par suite  $u_n \geq 2$  pour  $n \geq 0$  car  $u_0 \geq 2$ .

b. On a :

$$2 \left\{ \begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\frac{4}{u_n} - u_n = \frac{1}{2}\frac{4}{u_n} - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{4 - u_n^2}{2u_n} \leq 0 \quad \text{car } 4 - u_n^2 \leq 0 \\ \text{Donc, } u_{n+1} &\leq u_n \text{ pour tout } n \geq 0. \end{aligned} \right.$$

1.5 c. La suite  $u$  est décroissante et minorée. Donc, elle est convergente soit  $l$ .  
La fonction  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$  est continue en  $l$ . Donc, on a :  
$$l = \frac{1}{2} \left( l + \frac{4}{l} \right)$$

$$1 \left\{ \begin{aligned} 2l &= l + \frac{4}{l} \\ l^2 &= 4 \\ l &= -2, \text{ ou } l = 2 \end{aligned} \right.$$

Donc,  $l = 2$  car  $u_n \geq 2$ .

Problème 2. a. On a:

$$1 \left\{ \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

b. On a:

$$2 \left\{ \begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_{n-1}) - \sqrt{u_n v_{n-1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}})^2 \\ \text{Donc, } v_n - u_n &\geq 0. \end{aligned} \right.$$

c. On a:

$$1.5 \left\{ \begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0. \\ \text{Donc, } v \text{ est décroissante.} \end{aligned} \right.$$

$$1.5 \left\{ \begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n v_n} - u_n = \underbrace{\sqrt{u_n}}_{\geq 0} (\underbrace{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}_{\geq 0}) \geq 0. \\ \text{Donc, } u \text{ est croissante} \end{aligned} \right.$$

$$1 \left\{ \begin{aligned} \text{d. On a: } u_{n+1} \leq u_n &\Rightarrow -u_n \leq -u_{n+1} \Rightarrow v_n - u_n \leq v_n - u_{n+1} \end{aligned} \right.$$

$$1 \left\{ \begin{aligned} \text{D'autre part: } v_n - u_{n-1} &= \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - u_{n-1} = \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

e. On a:

$$1 \left\{ \begin{aligned} \text{D'après d), on a } v_n - u_n &\leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{aligned} \right.$$

f. On a:

$$2 \left\{ \begin{aligned} v_n - u_n &\leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (v_{n-2} - u_{n-2}) \leq \dots \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ &\leq 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned} \right.$$

On a alors:

$$2 \left\{ \begin{aligned} \lim(v - u) &= 0 \\ v \text{ est décroissante et } u \text{ est croissante. Donc } u \text{ et } v \text{ sont adjacentes.} \\ \text{Elles sont alors convergentes et ont la même limite.} \end{aligned} \right.$$





ETU SUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..